数理解析研究所講究録
第 1665 巻 2009 年 44-46

多重ゼータ値の２種類の母関数

名古屋大学・多元数理科学研究科 川島学
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1 序

次の数

$$\zeta(k_1,\ldots,k_p)=\sum_{n_1>\cdots>n_p>0}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_p^{k_p}}$$

は多重ゼータ値と呼ばれています. ここに, $(k_1,\ldots,k_p)$ は $k_1\geq 2$ なる多重指数 (正の整数の有限列). 一体どのような動機でこれらの数が研究されるようになったのか筆者はよく知りませんが, 既に Euler が $p=2$ の場合を扱っており,

$$\zeta(2,1)=\zeta(3)$$

などを示しています. 現在, このような多重ゼータ値間の $\mathbb{Q}$ 線形関係式が非常にたくさあるということが知られており, この現象の本質を理解したいというのが, 筆者がこれらの数を研究する動機です. このことに関して, 次の予想と結果があります.

予想 1 (Zagier). $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 Z_k $(k\geq 0)$ を

$$Z_0=\mathbb{Q},$$
$$Z_k=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_p=k\\ k_1\geq 2,\, p\geq 1}}\mathbb{Q}\zeta(k_1,\ldots,k_p)\quad (k\geq 1)$$

で定義するとき

$$\dim_{\mathbb{Q}} Z_k=d_k\quad (k\geq 0)$$

であろう. ここで, 数列 $\{d_k\}_{k\geq 0}$ の定義は

$$d_0=1,\quad d_1=0,\quad d_2=1,\quad d_k=k_{k-2}+d_{k-3}\quad (k\geq 3).$$

定理 2 (Goncharov, Terasoma). 任意の $k\geq 0$ に対して $\dim_{\mathbb{Q}}\leq d_k$.

上に出てきた $k_1+\cdots+k_p$ のことを $\zeta(k_1,\ldots,k_p)$ の重さといいます. 重さ k の多重ゼータ値の個数 $=2^{k-2}$ と d_k の値を表にしておきます.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2^{k-2}	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
d_k	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16

例えば, 重さ 13 の多重ゼータ値間には少なくとも 2032 個の線形関係式があることになります.

2 有限多重和を補間する多重級数

筆者は最近, 級数

$$\sum_{\substack{n_1 > n_2 > \cdots > n_{K_1} \\ \geq n_{K_1+1} > n_{K_1+2} > \cdots > n_{K_2} \\ \cdots \\ \geq n_{K_{p-1}+1} > n_{K_{p-1}+2} > \cdots > n_{K_p}}} \left(\frac{1}{(n_1+1)^{e_1}} - \frac{1}{(n_1+z+1)^{e_1}} \right) \frac{1}{(n_2+1)^{e_2} \cdots (n_{K_1+1})^{e_{K_1}}}$$

$$\frac{1}{(n_{K_1+1}+z+1)^{e_{K_1+1}} (n_{K_1+2}+1)^{e_{K_1+2}} \cdots (n_{K_2}+1)^{e_{K_2}}}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{(n_{K_{p-1}+1}+z+1)^{e_{K_{p-1}+1}} (n_{K_{p-1}+2}+1)^{e_{K_{p-1}+2}} \cdots (n_{K_p}+1)^{e_{K_p}}}$$

を調べており, 多重ゼータ値に関して何か新しいことが分かるのではないかと期待しています. 和は条件をみたす非負の整数全体についてとります. 本稿では, 全ての e_i が 1 の場合について調べた結果について述べます. 多重指数 $(k_1, \ldots, k_p)$ に対して, $G_{k_1,\ldots,k_p}(z)$ を上の級数で全ての e_i を 1 とおいたものとします. ここに,

$$K_i = k_1 + k_2 + \cdots + k_i \quad (1 \leq i \leq p).$$

容易に分かるようにこの級数は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数を定め, $z = 0$ での Taylor 係数は多重ゼータ値で記述されます. 以下, この級数の $z \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ での値について述べるのですが, その前に定義を二つします.

(1) 多重指数 $(k_1, \ldots, k_p)$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_{k_1,\ldots,k_p}(n) := \sum_{n > n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 0} \frac{1}{(n_1+1)^{k_1} \cdots (n_p+1)^{k_p}}.$$

(2) 多重指数 $(k_1, \ldots, k_p)$ に対して, その反転 $(k_1, \ldots, k_p)^*$ を

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & \bigcirc & & & \\ 2 & \bigcirc & \bigcirc & & \\ 3 & & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & \bigcirc & \bigcirc & & \\ 2 & & \bigcirc & \bigcirc & \\ 2 & & & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ 1 & & & & \bigcirc \\ 1 & & & & \bigcirc \end{array}$$

$$(1,2,3)^* = (2,2,1,1), \quad (2,2,2)^* = (1,2,2,1), \quad (4,1,1)^* = (1,1,1,3)$$

のように定義します.

このとき, $G_{k_1,\ldots,k_p}(z)$ の $z \in \mathbb{N}$ での値は次のようになります.

定理 3. 任意の多重指数 $(k_1, \ldots, k_p)$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$G_{k_1,\ldots,k_p}(n) = S_{(k_1,\ldots,k_p)^*}(n).$$

すなわち, 関数 $G_{k_1,\ldots,k_p}(z)$ は数列 $S_{(k_1,\ldots,k_p)^*}$ を補間します. 証明は部分分数分解と組合せ論的考察により初等的になされます.

3 有限多重和を補間する Newton 級数

数列の補間に関して Newton 級数というものが知られています. 数列 $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ に対して, その反転を

$$(\nabla a)(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a(k) \binom{n}{k}$$

で定義するとき, 級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\nabla a)(k) \binom{z}{k}, \quad \binom{z}{k} = \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!}$$

は $z = n \in \mathbb{N}$ で値 $(\nabla^2 a)(n) = a(n)$ をとります. すなわち, 数列 a を補間します. この級数は Newton 級数と呼ばれ, ある半平面 $\mathrm{Re}\, z > \rho\ (\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ で収束し, そこで正則関数を定めます. さて, 数列 $S_{k_1,\ldots,k_p}$ を補間する Newton 級数

$$F_{k_1,\ldots,k_p}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nabla S_{k_1,\ldots,k_p})(n) \binom{z}{n}$$

を考えると, この級数は半平面 $\mathrm{Re}\, z > -1$ で収束します. この関数の $z = 0$ での Taylor 係数も多重ゼータ値で記述されますが, それは次の事実によります:

$$s_{k_1,\ldots,k_p}(n) = \sum_{n=n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 0} \frac{1}{(n_1+1)^{k_1} \cdots (n_p+1)^{k_p}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定義するとき, $\nabla s_{k_1,\ldots,k_p} = s_{(k_1,\ldots,k_p)^*}$. ところで, $G_{(k_1,\ldots,k_p)^*}(z)$ も同じ数列を補間していました. このことに基づいて,

$$F_{k_1,\ldots,k_p}(z) = G_{(k_1,\ldots,k_p)^*}(z) \quad (\mathrm{Re}\, z > -1) \tag{1}$$

が証明できます. 両辺とも $z = 0$ での Taylor 係数は多重ゼータ値で書かれましたから, この式は多重ゼータ値の関係式を生み出します. 例えば, z^1 の係数を比較してみると, それは duality として知られる関係式にほかなりません. (1) が本稿での主結果です.

今考察したのは, 全ての e_i が 1 である特別な場合でしたが, より一般の場合を考察すると, (1) の拡張が得られ, そこからたくさんの多重ゼータ値の関係式が得られるようです.